I. S. C. I. D. — CONCOURS A 1988 — Régime Technologique

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Le problème est constitué de cinq parties d'inégale importance ; les quatre premières parties sont indépendantes, excepté la question IV,8.

On rappelle que ln désigne le logarithme népérien et exp la fonction exponentielle (on écrira exp(x) ou e^x).

I On considère un nombre réel $\alpha > 1$, et f la fonction définie par

$$f :]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \alpha x - 1 + (1-x)^{\alpha} = \alpha x - 1 + \exp\left[\alpha \ln (1-x)\right]$$

1. Etudier les variations de f.
2. Calculer les limites : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x)$
3. Tracer, dans un repère orthornormé, le graphe de f pour la valeur $\alpha = 1{,}2$. Préciser la direction asymptotique de la branche infinie et la tangente au graphe au point d'abscisse x = 1.
4. En déduire, pour toute valeur $\alpha > 1$, l'inégalité :
$\forall x \in]-\infty, 1[\quad (1-x)^{\alpha} \geqslant 1 - \alpha x$

II Etant donnés deux entiers N et p au moins égaux à 2, on pose :

$$u_N = \sum_{k=1}^{N-1} k^p = 1^p + 2^p + \ldots + (N-1)^p$$

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer les inégalités :

$$\int_{k-1}^{k} x^p dx \leqslant k^p \leqslant \int_{k}^{k+1} x^p dx$$

2. En déduire que : $\int_0^{N-1} x^p dx \leqslant u_N \leqslant \int_1^N x^p dx$

3. Montrer que : $\frac{(N-1)^{p+1}}{p+1} \leqslant u_N \leqslant \frac{N^{p+1}}{p+1}$

III Une urne contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. On tire avec remise deux jetons. On note Y le plus grand des numéros tirés et Z le plus petit.

1. Ecrire, sous la forme d'un tableau à double entrée, la loi conjointe du couple (Y,Z) et les lois marginales de Y et Z.
2. Calculer les espérances de Y et Z, les variances de Y et Z et la covariance de (Y,Z) ; les résultats seront écrits à l'aide de fractions irréductibles.
3. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

IV Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N ($N \geqslant 2$) ; on tire avec remise p jetons ($p \geqslant 2$). On note Y le plus grand des numéros tirés, Z le plus petit et X_i le numéro du $i^{ème}$ jeton tiré ($1 \leqslant i \leqslant p$).

1. Quelle est la loi de X_i ?
2. Montrer que $P(Y \leqslant k) = P(X_1 \leqslant k) \times P(X_2 \leqslant k) \times \ldots \times P(X_p \leqslant k)$
3. Montrer que $P(Y = k) = P(Y \leqslant k) - P(Y \leqslant k-1)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$
4. En déduire que $P(Y = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^p - \left(\frac{k-1}{N}\right)^p$
5. De même, calculer $P(Z \geqslant k)$ et en déduire que
$P(Z = k) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^p - \left(\frac{N-k}{N}\right)^p$
6. Montrer que l'espérance de Y (notée E(Y)) est égale à
$$E(Y) = N^{-p} \sum_{k=1}^{N} \left[k^{p+1} - (k-1)^{p+1} - (k-1)^p \right] = N - N^{-p} \sum_{k=1}^{N-1} k^p$$
7. De même, montrer que
$$E(Z) = 1 + N^{-p} \sum_{k=1}^{N-1} k^p$$
8. En déduire à l'aide de II,3, que
$$N \frac{p}{p+1} \leqslant E(Y) \leqslant N - \frac{N}{p+1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{p+1}$$
Puis, à l'aide de I,4
$$N \frac{p}{p+1} \leqslant E(Y) \leqslant N \frac{p}{p+1} + 1$$
9. Montrer de même que $\frac{N}{p+1} \leqslant E(Z) \leqslant \frac{N}{p+1} + 1$

V Les taxis d'une grande métropole sont tous dotés d'un numéro compris entre 1 et N. Au cours d'une promenade, j'ai relevé les numéros de 10 taxis :

3 293	6 022	5 870	4 485	3 608
7 998	129	6 870	4 542	8 214

A combien estimez-vous le nombre N de taxis ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail